اثر همزمان اصطکاک و انتقال حرارت در جریان گاز تراکم‌پذیر

مجید رضا عامری گلستان
دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر اصفهان

چکیده

همـواره مواردی وجود دارد که جریان سیال تراکم‌پذیر عبوری از یک مجرا تحت تأثیر انتقال حرارت از آن مجرا باشد. همچنین بدیهی است که اصطکاک دیواره مجرا نیز وجود خواهـد داشت. بنابراین چنانچه بتوانیم تأثیر این دو پدیده را در خواص جریان پیش‌بینی کنـیم، مفید خواهد بود. برای این منظور ابتدا معادلات حاکم بر جریان را بدست می‌آوریم و سپس به حل آنها می‌پردازیم. از آنجا که معادلات حاصله حل تحلیلی مشخصی ندارند، بـه حل عددی روی می‌آوریم که آن هم مشکلات خاص خودش را خواهد داشت. از جمله ایـن مشـکلات وقـت‌گیر بودن آن می‌باشد. برای پرهیز از وارد شدن به محاسبات عددی پیچـیده، یـک راه حل تقریبی ارائه خواهد شد و در نهایت به بررسی حوزه کاربرد روش تقریبی خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: جریان تراکم پذیر، اصطکاک و انتقال حرارت، افت فشار، روشهای تقریبی

[Downloaded from necjournals.ir on 2026-11-10]

علائم و نشانه ها:

C_p : گرمای ویژه در فشار ثابت ($\frac{\text{kJ}}{\text{kg}-\text{K}}$)

D : قطر لوله (m)

f : ضریب اصطکاک

h : ضریب انتقال حرارت جابجایی ($\frac{W}{m^2-K}$)

K : ضریب هدایت حرارتی گاز ($\frac{W}{m\ -K}$)

L : طول لوله(m)

M : عدد ماخ

X : طول المان(m)

P : فشار استاتیک (kPa)

P_t : فشار سکون (kPa)

Pr : عدد پرانتل

$\dot{q}$: انتقال حرارت به ازای واحد جرم گاز عبوری از لوله ($\frac{kJ}{kg}$)

q : نرخ انتقال حرارت روی لوله (kW)

T : دمای ا ستاتیک (K)

T_t : دمای سکون (K)

T_w : دمای دیواره مجرا (K)

V : سرعت جریان ($\frac{m}{s}$)

γ : نسبت گرمای ویژه در فشار ثابت به گرمای ویژه در حجم ثابت

μ : لز جت گاز ($\frac{N.s}{m^2}$)

ρ : دانسیته گاز($\frac{kg}{m^3}$)

τ_w : تنش برشی دیواره($\frac{N}{m^2}$)

(*) : خواص در محلی که عدد ماخ یک است

[Downloaded from necjournals.ir on 2026-11-10]

مقدمه

محاسبه افت فشار یکی از مسائل رایج در سیستم‌های انتقال سیال می‌باشد. معمولاً این محاسبات برای سیالات تراکم‌ناپذیر در حوزه مکانیک سیالات و برای سیالات تراکم‌پذیر در مبحث دینامیک گازها بیان می‌شوند. برای بدست آوردن افت فشار در هر صورت لازم است معادلات جریان همراه با شرایط مرزی موجود حل شوند. از جمله مهمترین شرایط مرزی موجود، شرایط مرزی حرارتی می‌باشند. همچنین برای جریان‌های داخلی باید اصطکاک دیواره را نیز مدنظر داشت.

در این بررسی، جریان تراکم‌پذیر زیر صوت و فرا صوت یک گاز ایده‌ال را در مجرایی با مساحت مقطع ثابت مطالعه می‌کنیم که همراه با انتقال حرارت باشد. در این صورت چه انتقال حرارت به صورت خارجی باشد مانند یک مبدل حرارتی و چه به صورت داخلی باشد مانند یک واکنش شیمیایی، اصطکاک دیواره نیز حضور دارد. بنابراین لازم است اثر هر دو پدیده انتقال حرارت و اصطکاک را بطور همزمان روی خواص جریان بدست آوریم. در اینجا دو نوع شرط مرزی حرارتی را اعمال می‌کنیم. یکی شرط شار حرارتی ثابت و دیگری شرط ثابت بودن دمای دیواره مجرا. در عمل شرط مرزی اول وقتی اتفاق می‌افتد که مثلاً دیواره مجرا بوسیله عبور جریان الکتریسته از خود دیواره و یا از مقاومت‌های الکتریکی که دور مجرا پیچیده شده‌اند، گرم شود. شرط مرزی دوم نیز هنگامی پیش می‌آید که مجرا در حمامی از یک سیال در حال جوشش یا میعان در فشار ثابت قرار گرفته باشد.

پس از بدست آوردن معادلات لازم به حل آنها می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که در این حالت (اثر همزمان انتقال حرارت و اصطکاک) برای بدست آوردن خواص جریان یک روش تقریبی وجود دارد که از سادگی بیشتری نسبت به حل دقیق برخوردار است. حوزه کاربرد این روش را بررسی خواهیم کرد و نشان می‌دهیم که در ناحیه گذر از صوت دقت این روش به شدت کم می‌شود.

لازم به ذکر است که یکی از موارد کاربرد جریان تراکم‌پذیر همراه با اصطکاک و انتقال حرارت در طراحی مبدل‌های حرارتی است. زیرا مبدل‌های حرارتی باید طوری طراحی شوند که ضمن انتقال حرارت کافی، کمترین افت فشار که ناشی از اصطکاک است نیز حاصل شود و به این ترتیب توان لازم برای پمپ کردن سیال به حداقل ممکن کاهش یابد.

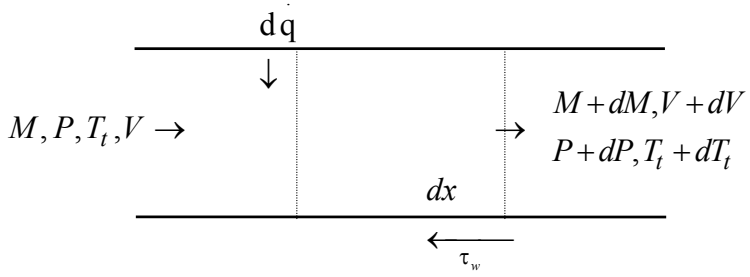
فرضیات:

i) جریان را یک بعدی و پایدار و گاز را ایده‌آل در نظر می‌گیریم.
ii) مجرا را با مقطع دایره‌ای شکل و با مساحت مقطع ثابت در نظر می‌گیریم.
iii) فرض می‌کنیم که شار حرارتی به طور یکنواخت در طول لوله توزیع شده باشد.
iv) انتقال حرارت در c_p ثابت انجام می‌گیرد.

معادلات حاکم:

جریان پایدار و یک بعدی یک گاز ایده‌آل را در لوله‌ای با مساحت مقطع ثابت همراه با انتقال حرارت و اصطکاک دیواره در نظر می‌گیریم (شکل ۱). یک حجم معیار دیفرانسیلی انتخاب می‌کنیم و معادلات حرکت و انرژی را برای آن می‌نویسیم.

[Downloaded from necjournals.ir on 2026-11-10]



شکل ۱ـ جریان تراکم‌پذیر یک گاز درون لوله‌ای با اصطکاک و انتقال حرارت

معادله پیوستگی:

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dV}{V}=0 \qquad (۱)$$

معادله ممنتوم:

$$dp+1/2\rho V^2 f\frac{dx}{D}+\rho V dV=0 \qquad (۲)$$

در معادله(۲)، D قطر لوله و f ضریب اصطکاک داخلی لوله است که به صورت $f=\frac{4\tau_w}{1/2\rho V^2}$ تعریف می‌شود. مقدار f به عدد رینولدز و زبری دیواره بستگی دارد.

معادله (۲)، با توجه به روابط $V=M\sqrt{\gamma RT}$ و $\frac{dV}{V}=\frac{dM}{M}+1/2\frac{dT}{T}$ به صورت معادله (۳) در می‌آید.

$$\frac{dP}{P}+1/2\gamma M^2 f\frac{dx}{D}+\gamma M^2\frac{dM}{M}+1/2\gamma M^2\frac{dT}{T}=0 \qquad (۳)$$

معادله انرژی:

$$\dot{dq}=C_p dT_t \qquad (٤)$$

با توجه به رابطه $T_t=T(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)$ که رابطه بین دمای سکون و دمای استاتیک را بر حسب نوع گاز و عدد ماخ بیان می‌کند، را بطه (٤) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\dot{dq}}{c_p T}=(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)\frac{dT}{T}+(\gamma-1)MdM \qquad (٥)$$

[Downloaded from necjournals.ir on 2026-11-10]

رابطه (۵) را می‌توان برای جمله $\frac{dT}{T}$ حل کرد. همچنین با توجه به معادله حالت گاز ایده‌آل داریم $\frac{dP}{P}=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dT}{T}$ که از ترکیب این رابطه با معادله پیوستگی (۱) و تعریف عدد ماخ خواهیم داشت:

$$\frac{dP}{P}=-\frac{dM}{M}+1/2\frac{dT}{T} \qquad (۶)$$

با جایگذاری $\frac{dP}{P}$ از معادله (۶) و $\frac{dT}{T}$ از معادله (۵) در معادله (۳) به معادله (۷) خوا هیم رسید[۱].

$$\frac{\dot{dq}}{c_p T_t}1/2(1+\gamma M^2)+1/2\gamma M^2 f\frac{dx}{D}=[\frac{1-\gamma M^2}{M}+\frac{(\gamma-1)(1+\gamma M^2)1/2M}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}]dM \qquad (۷)$$

رابطه (۷) بیان کننده آثار تبادل گرما و اصطکاک به طور همزمان می‌باشد. به عبارت بهتر تغییرات عدد ماخ یک جریان دراثر انتقال حرارت و اصطکاک از رابطه (۷) بدست می‌آید.

چنانچه عدد پرانتل گاز ($Pr=\frac{c_p\mu}{k}$) نزدیک به یک باشد، خواهیم داشت:

$$\dot{dq}=\dot{m}.\dot{dq}=\dot{m}.c_p dT_t=h(T_w-T_t)\pi D dx \qquad (۸)$$

که در آن h ضریب انتقال حرارت جابجایی بین گاز و دیواره می‌باشد. در این حالت با توجه به برقراری تشابه رینولدز، رابطه بین h و f به صورت $h=\frac{\rho V c_p f}{8}$ می‌باشد. با توجه به این ارتباط و همچنین جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۷) خواهیم داشت:[۱]

$$\frac{T_w-T_t}{T_t}\frac{1+\gamma M^2}{4}\frac{fdx}{D}+1/2\gamma M^2\frac{fdx}{D}=[\frac{1-\gamma M^2}{M}+\frac{(\gamma-1)(1+\gamma M^2)1/2M}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}]dM \qquad (۹)$$

به کمک رابطه (۷) شرط شار حرارتی ثابت و به کمک رابطه (۹) شرط ثابت بودن دمای دیوار را اعمال می‌کنیم.

[Downloaded from necjournals.ir on 2026-11-10]

در نهایت برای محاسبه افت فشار از رابطه (٦) استفاده می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (٦) بین شرایط دلخواه تا شرایطی که در آن عدد ماخ یک می‌شود (این شرایط را با علامت * نشان می‌دهیم) به رابطه (١٠) می‌رسیم.

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{T}{T^*}} \qquad (١٠)$$

از آنجا که به ازای یک دبی جرمی مشخص، شرایط * ثابت ا ست بنابراین رابطه زیر را می‌توان بین دو مقطع ١ و ٢ از لوله نوشت:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{P_2}{P^*}}{\frac{P_1}{P^*}} = \frac{\frac{1}{M_2}\sqrt{\frac{T_2}{T^*}}}{\frac{1}{M_1}\sqrt{\frac{T_1}{T^*}}} = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \qquad (١١)$$

در این صورت با مشخص بودن فشار در مقطع ١، افت فشار به راحتی به صورت $\Delta P = P_1 - P_2$ محاسبه می‌گردد.

روش حل:

در اینجا هدف حل عددی معادلات (٧) و (٩) می‌باشد. همانطور که گفته شد معادله (٧) برای شرط مرزی شار حرارتی ثا بت بکار گرفته می‌شود و معادله (٩) برای شرط مرزی ثابت بودن دمای دیواره. ابتدا به ارائه روش حل برای معادله (٧) می‌پردازیم. ابتدا لوله را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. بنابراین اگر طول کل لوله L باشد، طول هر المان برابر خواهد بود با $dx = \frac{L}{n}$ با توجه به فرض iii میزان انتقال حرارت به هر المان نیز عبارت خواهد بود از $dq_i = \frac{q}{n}$ ($i = 1,2,3,\ldots,n$). بنابراین با معلوم بودن عدد ماخ و دمای سکون جریان ورودی به لوله می‌توان از روابط (٧) و (٤) تغییرات عدد ماخ (dM) و دمای سکون خروجی از اولین المان را بدست آورد. آنگاه با جمع جبری dM و M عدد ماخ در خروجی اولین المان بدست می‌آید. این مقادیر بعنوان ورودی المان دوم مجدداً در روابط (٧) و (٤) مورد استفاده قرار می‌گیرند و مقادیر آنها در خروجی المان دوم محاسبه می‌گردند و به همین ترتیب المان به المان به پیش می‌رویم تا به آخرین المان برسیم.

بدیهی است که دقت اعداد ماخ بدست آمده با افزایش تعداد تقسیمات لوله، افزایش می‌یابد.در عمل چون از نظر زمانی محدودیت داریم کافی است که میزان دقت را از قبل تعیین کنیم و محاسبات را تا حصول دقت مربوطه به پیش ببریم. برای این منظور در چهار محل از لوله (انتها، وسط و دو نقطه یکی قبل ودیگری بعد از وسط) اقداد ماخ را با انتخاب یک n دلخواه بدست می‌آوریم. سپس n را افزایش داده و مجدداً اعداد ماخ را در چهار نقطه قبلی بدست می‌آوریم. با کم کردن اعداد ماخ نقاط متنافر، بزرگترین تفاضل را بعنوان خطا در نظر می‌گیریم. محاسبات را آنقدر تکرار می‌کنیم که خطای محاسبه شده از یک

[Downloaded from necjournals.ir on 2026-11-10]

مقدار از پیش تعیین شده کمتر گردد. در این حالت آخرین نتایج بعنوان نتایج نهایی در نظر گرفته می‌شوند. لازم به ذکر است که در این مقاله مقدار از پیش تعیین شده خطا را ۰/۰۰۰۰۱ در نظر گرفته‌ایم. با محاسبه اعداد ماخ و دماهای سکون در سرتا سر لوله، سایر خواص نیز براحتی از روابط مربوطه محاسبه می‌گردند. بعنوان مثال توزیع فشار از رابطه (۱۱) با معلوم بودن فشار گاز ورودی به لوله قابل محاسبه است.

روش حل معادله (۹) نیز مشابه روش گفته شده برای معادله (۷) می‌باشد. تنها تفاوت در این حالت نحوه محاسبه دمای سکون برای خروجی هر المان می‌باشد که از رابطه (۸) پیروی می‌کند.

گفتنی است که برنامه کامپیوتری نوشته شده برای حل معادلات (۷) و (۹) به زبان برنامه‌نویسی نرم‌افزار Maple تهیه شده است.

بررسی نتایج

شکل ۲ نتایج حل عددی معادله (۷) را به ازای مقادیر مختلف شار حرارتی برای جریان زیر صوت نشان میدهد. همین نتایج برای جریان فرا صوت در شکل ۳ آورده شده است. ملاحظه می‌شود که در هر حال با افزایش انتقال حرارت، جریان به سمت خفگی پیش می‌رود. علاوه بر آن هر چه انتقال حرارت بیشتر می‌شود، خفگی در نسبت $\frac{fx}{D}$ کوچکتری رخ می‌دهد. مشاهده می‌شود که این مسأله برای جریان فرا صوت شدیدتر است. نکته جالب توجه آن است که در جریان زیر صوت، دمای استاتیک قبل از انتهای لوله کاهش می‌یابد در حالی که انتقال حرارت به لوله همچنان ادامه دارد.

آنچه که از دو شکل ۲ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت آن است که به ازای یک مقدار مشخص انتقال حرارت، جریان زیر صوت افت فشار کمتری نسبت به جریان فرا صوت دارد. این مطلب می‌تواند توجیه این نکته باشد که چرا در مبدل‌های حرارتی از اعداد ماخ بزرگ باید پرهیز کرد.[۲]

در شکل ٤ نیز نتایج حل عددی معادله (۹) بازای مقادیر مختلف دمای دیواره برای جریان زیر صوت آورده شده است. در این حالت هم با افزایش دمای دیواره جریان به سمت خفگی پیش می‌رود.

نتایجی که تاکنون بدست آمد از حل معادلات(۷) و (۹) حاصل شده‌اند که بسیار وقت‌گیر می‌باشد. اگر هدف بدست آوردن یک تخمین اولیه از افت فشار سیال در لوله‌ای که بطور همزمان تحت تأثیر انتقال حرارت و اصطکاک قرار دارد، باشد می‌توان یکبار جریان را تنها با انتقال حرارت در نظر گرفت (جریان ریلی) و افت فشار را بدست آورد و یکبار هم تنها اثر اصطکاک را روی جریان مد نظر داشت (جریان فانو)و باز افت فشار را بدست می‌آورد. با جمع کردن این دو افت فشار یک تخمین اولیه از مقدار دقیق افت فشار خواهیم داشت که تحت شرایطی از دقت بسیار خوبی برخوردار می‌باشد.

در شکل ٥ دقت این روش در مقایسه با حل معادله دقیق آمده است.ملاحظه می‌شود که برای یک لوله با طول ثابت و ضریب اصطکاک مشخص هر چه انتقال حرارت بیشتر شود خطای روش تقریبی نیز افزایش می‌یابد بطوریکه در خفگی مجرا (در ناحیه گذر از صوت)، ماکزیمم خطا را داریم. به همین ترتیب برای لوله‌ای با طول و نرخ انتقال حرارت ثابت، هرچه اصطکاک جداره بیشتر شود دقت روش تقریبی نیز کاهش می‌یابد.

گذشته از مسأله دقت روش تقریبی آنچه ما را به آن امیدوارتر می‌کند، صرفه‌جویی شدیدی است که در

[Downloaded from necjournals.ir on 2026-11-10]

زمان حاصل می‌شود.

این مسأله وقتی حائز اهمیت می‌شود که در مواقع اضطراری بخواهیم کمیتی را حساب کنیم. در این مواقع منتظر ماندن برای محاسبه دقیق، ممکن است خطرناک باشد. با روش تقریبی گفته شده می‌توان در عرض چند ثانیه مثلاً افت فشار را در لوله‌ای حساب کرد در حالیکه برای محاسبه دقیق افت فشار ممکن است زمان بسیار زیادتری لازم باشد. بعنوان نمونه زمان لازم برای محاسبه دقیق توزیع فشار برای منحنی ۱ از شکل ۲، ۲۵۳۹ ثانیه می‌باشد درحالیکه با کمتر از ۱۰ ثانیه به کمک روش تقریبی گفته شده همان توزیع فشار را با حداکثر خطایی معادل ۲۵ درصد می‌توان بدست آورد.

منابع

۱- دینامیک گازها، جیمز ئی. ا.جان، برگردان از دکتر علی اکبر عالم رجبی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۲

2- Ascher H. Shapiro, “Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow”, 1983

[Downloaded from necjournals.ir on 2026-11-10]