نشریه انرژی ایران / سال نهم / شماره ۲۰/آبان ۱۳۸۳

مقایسه بین متدهای تفاضل محدود و حجم محدود و اجزا محدود در حل یک مسأله انتقال حرارت دو بعدی در یک بلوک

سورنا ستاری، بیژن فرهانیه
دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله به کمک روش‌های گوناگون عددی به تحلیل انتقال حرارت در یک جسم جامد مرکب متشکل از چند نوع ماده مختلف پرداخته شده است. مساله با شرایط مرزی شار صفر و انتقال حرارت جابجایی در حالت دو بعدی حل گردیده است. مساله ابتدا به وسیله برنامه نوشته شده به زبان فرترن با متد کلی تفاضل محدود و در سه فرم صریح ، کرانک نیکلسن و ضمنی حل و کانتورهای دما و بردارهای شار حرارتی در جسم به وسیله نرم‌افزار Tecplot مشاهده گردید. سپس مسأله به کمک نرم‌افزار حجم محدود fluent و نرم‌افزار اجزا محدودansys حل گردید.

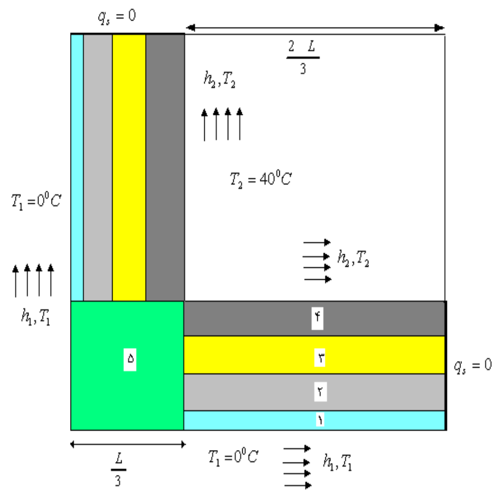
در این مقاله به بررسی سه روش تفاضل محدود و اجزا محدود و حجم محدود با هم در حل مسایل انتقال حرارت پرداخته و دقت و کارآمدی این روش ها با هم مقایسه شده است. مقایسه کلی نشان می‌دهد که روش حجم محدود زمان همگرایی کمترو نتایج بهتری را در مرزها نسبت به روش اجزا محدود و تفاضل محدود از خود نشان می دهد. روش اجزا محدود نیز نسبت به روش تفاضل محدود نتایج بهتری را از خود نشان می‌دهد. در میان روش‌های تفاضل محدود نیز در حالت صریح سرعت حل بیشتر می‌گردد و نتایج دقیق‌تری بر روی مرزها مشاهده می‌شود.

مقدمه

بررسی انتقال حرارت به کمک روش‌های محاسباتی به نسبت روش‌های تجربی و آزمایشگاهی بسیار کم هزینه و دقیق‌تر می‌باشد. با توجه به رشد روزافزون نرم‌افزارها و گسترش روش‌های عددی نیاز به مقایسه و شناسایی متدهای گوناگون در حل مسایل مختلف می‌باشد.

مدل فیزیکی

در این مقاله انتقال حرارت هدایتی دو بعدی غیر دایم در بلوک مرکب نشان داده شده در شکل شماره (۱) با روش‌های گوناگون عددی بررسی شده است.



شکل ۱ـ مدل فیزیکی در نظر گرفته شده

بلوک جامد مرکب از ۵ نوع ماده مختلف می‌باشد که خواص آنها در جدول شماره (۱) آمده است.

جدول ۱ـ خواص و جنس دیواره‌های در نظر گرفته شده

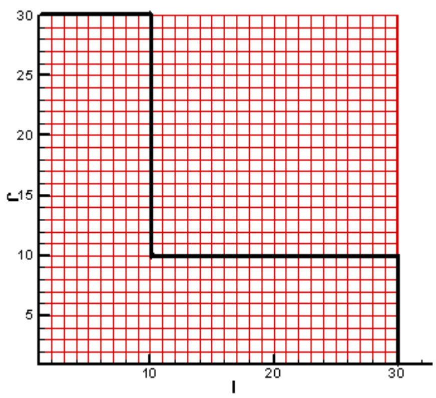
دیوار	دیوار شماره ۱	دیوار شماره ۲	دیوار شماره ۳	دیوار شماره ٤	دیوار شماره ٥
$\rho(Kg/m^3)$	۱۰۰۰	۱٤۷۰	۸٤۰	۹٦۰	۲۰۰۰
$C_v(\frac{j}{Kg.K})$	۱۳۳۰	٤٥	۱۳۰۰	۱۱۲۰	۸٤۰
$k(\frac{W}{m.K})$	۰/۷۹	۰/۰۳	۰/۷٥	۰/٥۱	۱/۳

شبکه‌بندی و پیشروی زمانی

شبکه‌بندی در نظر گرفته شده یکنواخت می‌باشد و فقط مقادیر $\Delta X, \Delta Y$ قابل تغییر هستند. به خاطر تقارن مسأله در جهت x ,y شبکه‌بندی دردو جهت یکسان فرض شده است. $(\Delta X = \Delta Y)$

در این مدل‌سازی هدف اصلی، رسیدن به جواب‌های حالت دایم می‌باشد که با افزایش کل زمان حل، می‌توان به این مهم دست یافت. گام زمانی (Δt) مورد استفاده در حل sec ۵ می‌باشد.

برای حل اولیه تعداد نودها در جهتx,y به صورت یکسان و برابر ۳۰ نود در نظر گرفته شده است. البته مسأله درحالت های دیگر نیز حل شده است. قسمتی از فضای حل که در آنجا انتقال حرارت جاجایی وجود دارد نیز شبکه‌بندی شده است هر چند که این موضوع در حل انتقال حرارت در بلوک جامد تأثیری ندارد. یک نمونه از شبکه‌بندی استفاده شده در شکل شماره (۲) ارائه شده است.



شکل ۲ـ شبکه‌بندی در نظر گرفته شده برای حل مسأله

شرایط مرزی و حدس اولیه

الف) شرط مرزی شار صفر:

$$q\Big|_{wall} = 0 \Rightarrow (\frac{\partial T}{\partial n})\Big|_{wall} = 0 \Rightarrow T\Big|_{I_{wall}} = T_{I_{wall}\pm 1} \qquad (۱)$$

ب) شرط مرزی جابجایی:

در این برنامه جهت مدل‌سازی این نوع شرط مرزی ابتدا دما روی نود خارجی (I=1) برابر T_1 یا T_2 در نظر گرفته و روی نود بعدی (I=2) معادله بالانس انتقال حرارت برای هر یک از روش‌های ذکر (صریح، کرانک نیکلسون و ضمنی) شده نوشته می‌شود.

$$q_{convection} = h_c A \times \Delta T\Big|_{I_{wall}\pm 1} \qquad (۲)$$

دماهای T_1 یا T_2 ثابت بوده و ضریب انتقال حرارت جابجایی از معادله ۳حاصل می‌شود:

$$h_c = \left\{ \left[D_1 \left(\frac{\Delta T}{XL} \right)^P \right]^{XM} + \left[D_2 (\Delta T)^Q \right]^{XM} \right\}^{\frac{1}{XM}} \qquad (۳)$$

که در آن: $XL = 1, XM = 6, D_1 = 1.5, D_2 = 1.23, P = 0.25, Q = 1/3$
بنابراین h_c تابعی از دما می‌باشد.

حدس اولیه

حدس اولیه استفاده شده به صورت ذیل می‌باشد:

$$T_{i,j}^{(p=1)} = \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \qquad (٤)$$

رابطه فوق برای نودهایی که روی مرزهای $q_s = 0$ قرار دارند نیز به کار می‌رود.

فرمول‌بندی

۱ـ روش تفاضل محدود

الف) گسسته‌سازی به روش صریح (Explicit) [1,2]

معادله کلی حاکم در این مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۵)$$

الف ـ ۱ـ گسسته‌سازی برای نود (i,j) غیر مرزی:

$$\frac{T_{i,j}^{\ p+1} - T_{i,j}^{\ p}}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j}^{\ p} - 2T_{i,j}^{\ p} + T_{i+1,j}^{\ p}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{\ p} - 2T_{i,j}^{\ p} + T_{i,j+1}^{\ p}}{\Delta y^2} \right) \qquad (٦)$$

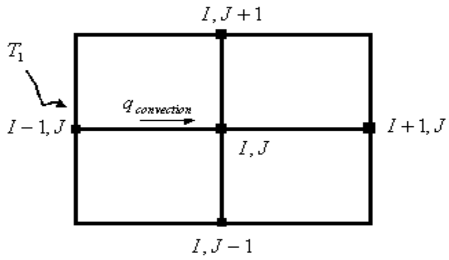
که p نشان‌دهنده تغییرات زمانی است. با توجه به فرمول شماره (٦) برای به دست آوردن دما در زمان جدید (p+1) فقط به دماهای زمان قبلی (p) نیاز است که همگی در دسترس می‌باشند (با توجه به حدس اولیه) لذا دراین روش با یک محاسبه جبری، دما در زمان جدید به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_{i,j}^{\ p+1} = \alpha \times \Delta t \times \left(\frac{T_{i-1,j}^{\ p} - 2T_{i,j}^{\ p} + T_{i+1,j}^{\ p}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{\ p} - 2T_{i,j}^{\ p} + T_{i,j+1}^{\ p}}{\Delta y^2} \right) + T_{i,j}^{\ p} \qquad (۷)$$

الف ـ ۲ـ گسسته‌سازی برای نود(i,j)جهت اعمال شرط مرزی جابجایی:

در شکل شماره (۳) برای نود (i,j) که همسایه نود مرزی (i-1,j) با دمای ثابت T_1 می‌باشد، معادله بالانس عبارت است از:

$$\rho C \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} (T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^{p}) = -2h_c \Delta y (T_{i,j}^{p} - T_{i-1,j}^{p}) + 2k\Delta y (\frac{T_{i+1,j}^{p} - T_{i,j}^{p}}{\Delta x}) + \frac{k\Delta x}{\Delta y} (T_{i,j-1}^{p} - 2T_{i,j}^{p} + T_{i,j+1}^{p})$$



شکل ۳ـ:شرایط گسسته‌سازی در نظر گرفته شده برای نودی که درآن شرط مرزی جابجائی اعمال می‌شود

از حل معادله شماره (۸) دمای مجهول $T_{i,j}^{p+1}$ به دست می‌آید. از خاصیت صریح بودن گسسته‌سازی نیز در اینجا استفاده شده است. الگوریتم فرترن برای حل مسأله در شکل شماره (۹) دیده می‌شود.

ب) گسسته‌سازی به روش کرانک نیکلسون (Crank Nickolson) [3,4,6]

معادله کلی حاکم در این مسأله به صورت معادله شماره (۵) خواهد بود:

ب ـ ۱ـ گسسته‌سازی برای نود (i,j) غیر مرزی:

$$\frac{T_{i,j}{}^{p+1}-T_{i,j}{}^{p}}{\Delta t}=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{T_{i-1,j}{}^{p}-2T_{i,j}{}^{p}+T_{i+1,j}{}^{p}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j-1}{}^{p}-2T_{i,j}{}^{p}+T_{i,j+1}{}^{p}}{\Delta y^2}\right)+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{T_{i-1,j}{}^{p+1}-2T_{i,j}{}^{p+1}+T_{i+1,j}{}^{p+1}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j-1}{}^{p+1}-2T_{i,j}{}^{p+1}+T_{i,j+1}{}^{p+1}}{\Delta y^2}\right) \quad (۹)$$

با توجه به فرمول فوق برای به دست آوردن دما در زمان جدید علاوه بر دماهای زمان قبلی نیاز به دماهای مجاور در زمان جدید می‌باشد ($T_{i,j+1}^{p+1}$، $T_{i,j-1}^{p+1}$، $T_{i+1,j}^{p+1}$ و $T_{i-1,j}^{p+1}$) بنابراین در این معادله شماره (۵) مجهول وجود دارند که با نوشتن این معادله برای تمامی نودها به تعداد کل مجهولات معادله خطی به دست می‌آید.

ب ـ ۲ـ گسسته‌سازی برای نود (i,j) جهت اعمال شرط مرزی جابجایی:

برای فرم نشان داده شده در روش قبلی معادله بالانس بر روی نود مذکور مانند معادله شماره (۱۰) می‌باشد.

$$\rho C\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}(T_{i,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p})=-2h_c\Delta y(\frac{T_{i,j}^{p+1}-T_{i-1,j}^{p}}{2}-T_{i-1,j}^{p})+ k\Delta y(\frac{T_{i+1,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}+T_{i+1,j}^{p}-T_{i,j}^{p}}{\Delta x})+\frac{k\Delta x}{2\Delta y}(T_{i,j-1}^{p+1}-2T_{i,j}^{p+1}+T_{i,j+1}^{p+1}+T_{i,j-1}^{p}-2T_{i,j}^{p}+T_{i,j+1}^{p}) \quad (۱۰)$$

که در آن برای به دست آوردن دما در زمان جدید علاوه بر دما های زمان قبلی نیاز به دماهای مجاور در زمان جدید می‌باشد ($T_{i+1,j}^{p+1}$ ، $T_{i,j-1}^{p+1}$ ، $T_{i,j+1}^{p+1}$) در این معادله شماره (٤) مجهول وجود دارد و با نوشتن این معادله برای تمامی نودها به تعداد کل مجهولات معادله خطی به دست می‌آید.

ج) گسسته‌سازی به روش ضمنی (Implicit) [5,7]

معادله کلی حاکم در این مسأله به صورت معادله شماره (۵) زیر خواهد بود:

ج ـ ۱ـ گسسته‌سازی برای نود (i,j) غیر مرزی:

(۱۱)

$$\frac{T_{i,j}{}^{p+1}-T_{i,j}{}^{p}}{\Delta t}=\alpha\left(\frac{T_{i-1,j}{}^{p+1}-2T_{i,j}{}^{p+1}+T_{i+1,j}{}^{p+1}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j-1}{}^{p+1}-2T_{i,j}{}^{p+1}+T_{i,j+1}{}^{p+1}}{\Delta y^2}\right)$$

با توجه به فرمول فوق برای به دست آوردن دما در زمان جدید علاوه بر دماهای زمان قبلی نیاز به دماهای مجاور در زمان جدید می‌باشد ($T_{i,j+1}^{p+1}$ ، $T_{i,j-1}^{p+1}$ ، $T_{i+1,j}^{p+1}$ و $T_{i-1,j}^{p+1}$) در این معادله شماره (۵) مجهول وجود دارد که با نوشتن این معادله برای تمامی نودها به تعداد کل مجهولات معادله خطی به دست می‌آید.

ج ـ ۲ـ گسسته‌سازی برای نود (i,j)جهت اعمال شرط مرزی جابجایی:

برای شکل شماره (۳) معادله بالانس بر روی نود مذکور:

$$\rho C\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}(T_{i,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p})=-2h_c\Delta y(T_{i,j}^{p+1}-T_{i-1,j}^{p})+2k\Delta y(\frac{T_{i+1,j}^{p+1}-T_{i,j}^{p+1}}{\Delta x})$$
$$+\frac{k\Delta x}{\Delta y}(T_{i,j-1}^{p+1}-2T_{i,j}^{p+1}+T_{i,j+1}^{p+1}) \qquad (۱۲)$$

که در آن برای به دست آوردن دما در زمان جدید علاوه بر دما های زمان قبلی نیاز به دماهای مجاور در زمان جدید می‌باشد ($T_{i,j+1}^{p+1}$ ، $T_{i,j-1}^{p+1}$ ، $T_{i+1,j}^{p+1}$) فلذا در این معادله شماره (٤) مجهول وجود دارند که با نوشتن این معادله برای تمامی نودها به تعداد کل مجهولات معادله خطی به دست می‌آید. الگوریتم فرترن برای حل مسأله در شکل شماره (۱۰) دیده می‌شود.

۲ـ فرمول‌بندی اجزا محدود [8]

ـ معادلات مربوط به هدایت حرارتی در قانون بقای انرژی از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$\{q\}=-[D]\{L\}T \qquad (۱۳)$$

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\{V\}^T\{L\}T\right)+\{L\}^T\{q\}=\ddot{q} \qquad (۱٤)$$

که در آن Kxx,Kyy,Kzz ضرایب انتقال حرارت در سه جهت هستند.
از ترکیب معادلات بالا دارید:

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\{V\}^T\{L\}T\right)+\{L\}^T\left([D]\{L\}T\right)=\ddot{q} \tag{۱۵}$$

فرم باز شده معادله شماره (۱۵) به صورت زیر است:

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\ddot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{۱۶}$$

۲ـ معادلات مربوط به همرفت:

$$\{q\}^T\{\eta\}=h_f\left(T_S-T_B\right) \tag{۱۷}$$

$$\{\eta\}^T[D]\{L\}T=h_f\left(T_B-T\right) \tag{۱۸}$$

فرم معادلات برای در نظر گرفتن توامان همرفت و هدایت

$$\begin{aligned}&\int_{vol}\left(\rho c\,\delta T\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\{V\}^T\{L\}T\right)+\{L\}^T(\delta T)\left([D]\{L\}T\right)\right)d(vol)=\int_{S_2}\delta T q^* d(S_2)+\\&\int_{S_3}\delta T h_f\left(T_B-T\right)d(S_3)+\int_{vol}\delta T\ddot{q}\,d(vol)\end{aligned} \tag{۱۹}$$

۳ـ فرمول‌بندی حجم محدود [9]

در روش حجم محدود از الگوریتم حل توام سرعت و فشار در جریان‌های دائم استفاده گردید که در آن از حل معادلات ممنتوم در دو جهت x,y به کمک روش Upwind مرتبه اول و معادله پیوستگی و معادله انرژی به کمک روش Upwind مرتبه اول استفاده می‌شود. حل معادلات سرعت و فشار با یک روش تکرار مانند الگوریتم SIMPLE انجام می‌گردد تا همگرائی حاصل شود.

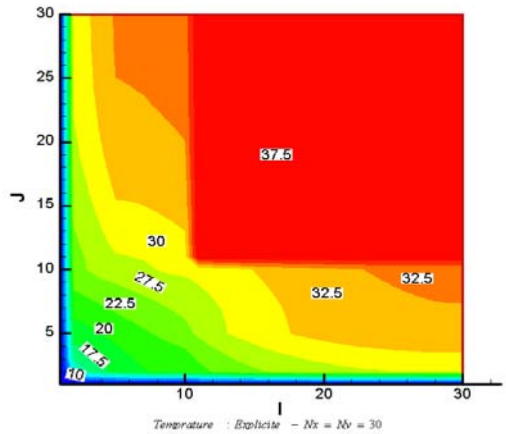
جواب‌ها با متدهای گوناگون حل:

۱ـ روش تفاضل محدود

الف) گسسته‌سازی به روش صریح

با نوشتن بالانس انتقال حرارت در تمامی نودهای فضای حل دما در زمان‌های جدید با توجه به زمان قبلی به دست می‌آید. با تکرار زیاد این پروسه در طول کل زمان حل مسأله به هدف اصلی یعنی گرایش به حالت دایم پیدا می‌کند ودقت حل بالاتر می‌رود. در این روش تمامی پارامترها تأثیر مستقیم و مؤثری بر حل دارند. در حالت کلی روش دقیقی به حساب نمی‌آید هر چند سرعت آن بسیار بالا می‌باشد. زمان

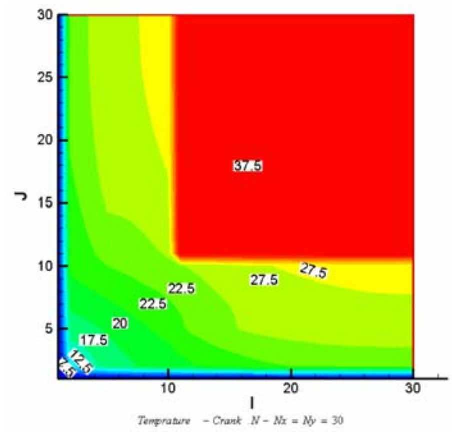
کل ۲۰۰۰۰۰ ثانیه جهت پایدارشدن حل در نظر گرفته شده است. چند نمونه از جواب‌های حل با این روش را در شکل شماره (٤) می‌بینید.



شکل ۴ـ کانتورهای دما در روش تفاضل محدود گسسته‌سازی به روش صریح (Explicit)

ب) گسسته‌سازی به روش کرانک نیکلسون

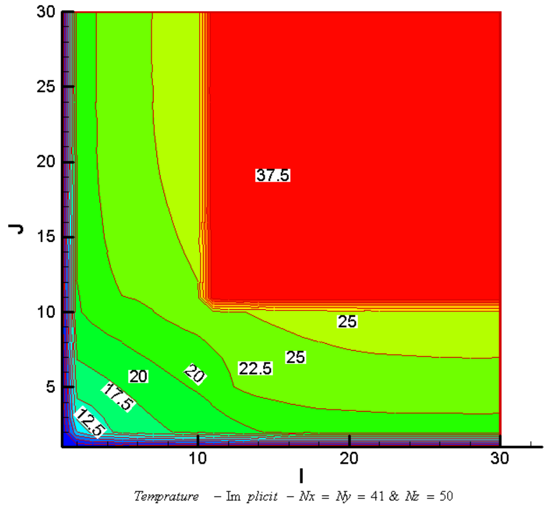
با نوشتن بالانس انتقال حرارت در تمامی نودهای فضای حل دما در زمان‌های جدید با حل یک دستگاه معادلات خطی به دست می‌آید. با تکرار این پروسه مسأله به حالت دایم گرایش پیدا می‌کند و حل دقیق‌تر می‌شود. این روش به نسبت روش قبلی بسیار دقیق‌تر خواهد بود ولی سرعت حل آن پایین‌تر است. زمان کل ۱۰۰۰ ثانیه جهت پایدار شدن حل مناسب می‌باشد. چند نمونه از جواب‌های حل با این روش را در شکل‌های شماره (۵) می‌بینید.



شکل ۵ـ کانتورهای دما در روش تفاضل محدود گسسته‌سازی به روش کرانک نیکلسون (Crank Nickolson)

ج) گسسته‌سازی به روش ضمنی

با نوشتن بالانس انتقال حرارت در تمامی نودهای فضای حل دما در زمان‌های جدید با حل یک دستگاه معادلات خطی به دست می‌آید. با تکرار این پروسه مسأله به حالت دایم گرایش پیدا می‌کند و حل دقیق‌تر می‌شود. این روش به نسبت دو روش قبلی بسیار دقیق‌تر خواهد بود ولی سرعت حل آن پایین‌تر است. زمان کل ۱۰۰۰ ثانیه جهت پایدار شدن حل مسأله مناسب می‌باشد. نتایج حل با این روش در شکل شماره (٦) ارائه می‌شوند.

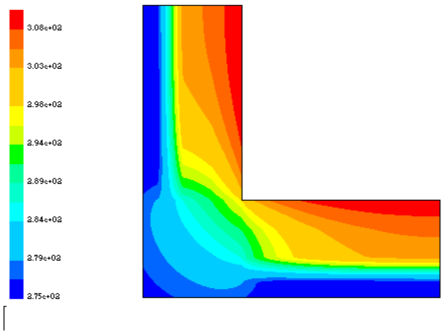


شکل ۶ـ کانتورهای دما در روش تفاضل محدود گسسته‌سازی به روش ضمنی (Implicit)

۲ـ روش حجم محدود

متد	معادلات
Standard	Pressure
First Order Upwind	Momentum
SIMPLE	Pressure-Velocity Coupling
First Order Upwind	Energy

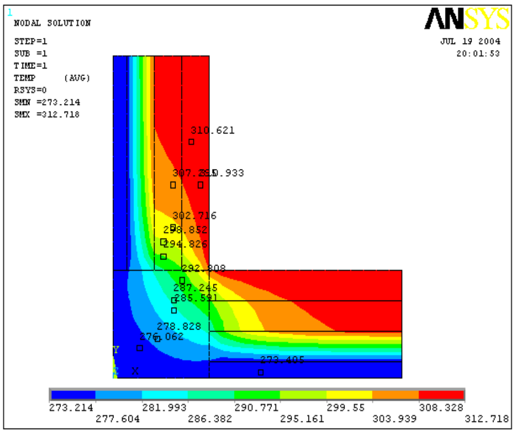
تعداد نودها در این حل در هر دو راستای x,y برابر ۳۰۰ می‌باشند. توزیع دما در شکل شماره (۷) نشان داده شده است. توزیع دما در گوشه پایین سمت چپ با جواب‌های برنامه کمی متفاوت می‌باشد. که نشان‌دهنده برتری مدل‌سازی حجم محدود بر روش تفاضل محدوداست. این جواب به وضوح تأثیر تغییر جنس دیوار را در شرایط مرزی نشان می‌دهد.



شکل ۷ـ کانتورهای دما در روش حجم محدود

۳ـ روش اجزا محدود

حل معادلات انتقال حرارت با روش اجزا محدود نتایج بهتری نسبت به روش تفاضل محدود از خود نشان داده است. نتایج در شکل شماره (۸) نشان داده شده است



شکل ۸ـ کانتورهای دما در روش المان محدود

نتایج

مقایسه سه روش های تفاضل محدود با یکدیگر

با ریزترشدن مش‌بندی در حالت صریح سرعت حل بیشتر می‌گردد

ریزترشدن مش‌بندی از یک حد بیشتر در روش صریح در مقایسه با روش کرانک نیکلسون، در دقیق بودن جواب‌ها تأثیری نخواهد داشت.

سرعت حل به ترتیب در متد صریح بیشتر از متد کرانک نیکلسون بیشتر می‌باشد و این به دلیل تفاوت نوع گسسته‌سازی در کدام از این متدها می‌باشد. در روش ضمنی گسسته‌سازی براساس مقادیر دما در زمان جدید صورت می‌گیرد که آنها نیز مجهول می‌باشند اما در روش کرانک نیکلسون مقادیر دما در زمان جدید هم به دما در زمان‌های جدید و هم به قدیم مرتبط می‌شود که این وزن دما تأثیر دما در زمان‌های جدید را به نصف کاهش می‌دهد. در روش صریح دما در زمان‌های جدید براساس دما در زمان‌های قدیم محاسبه می‌شوند.

توزیع دمای در نزدیک مرزها در روش ضمنی بسیار دقیق‌تر می‌باشد بنابراین مدل‌سازی شرایط مرزی در متد ضمنی بر دو روش دیگر تفاضل محدود برتری دارد.

توزیع بردارهای انتقال گرما در هر سه روش تفاضل محدود تقریباً یکسان می‌باشد.

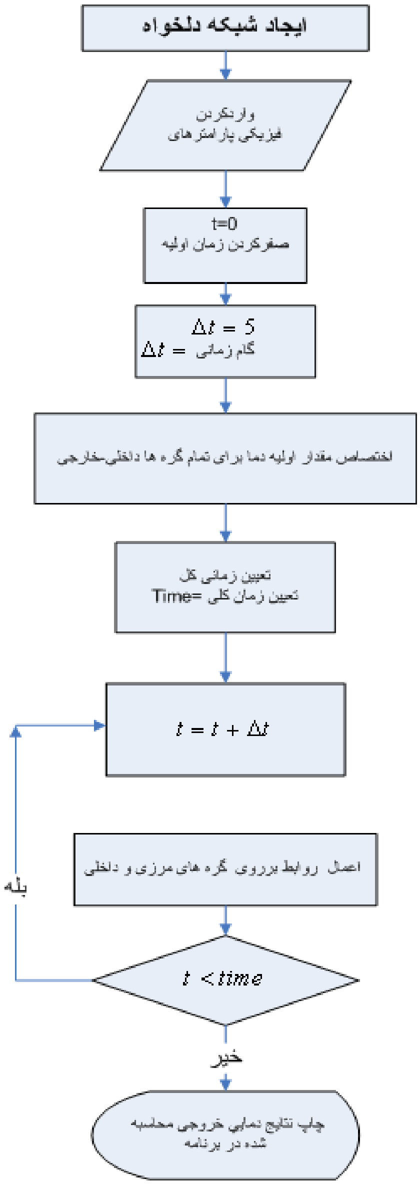
در مناطقی از بلوک که نزدیک مرز نمی‌باشند، تقریباً مقادیر دما در سه روش یکسان می‌باشند.

مقایسه کلی سه روش

روش حجم محدود نتایج معتبرتری را نسبت به سایر روش‌ها ارائه می‌کند و دقت بالاتر و نتایج بهتری را در مرزها می‌دهد.

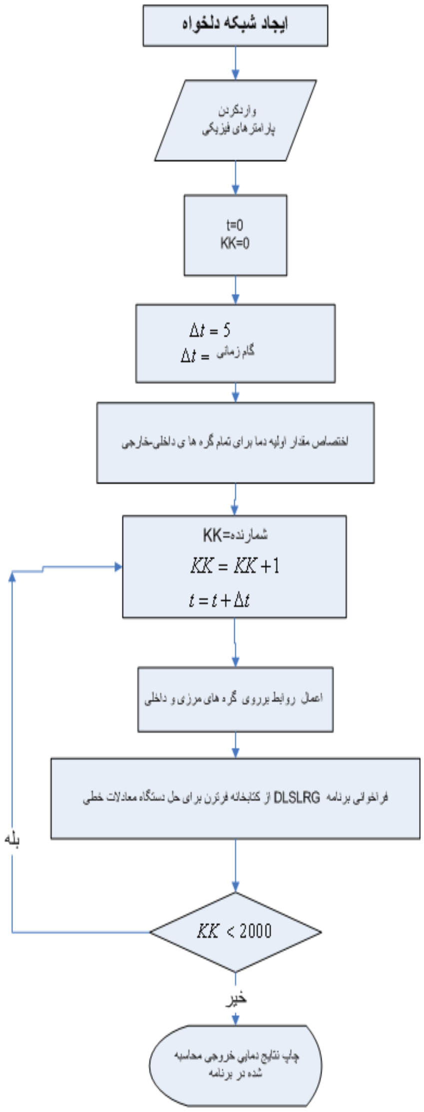
نمادها:

تعریف	نماد	تعریف	نماد
گرمای ویژه	C_V	چگالی	ρ
ضرایب هدایت در جهت های xوyوz	K(xx,yy,zz)	حرارت تولیدی در واحد سطح	q'''
بردار شار حرارتی	$\{q\}$	ضرایب همرفت متغییر	hc
دما	T	ضریب همرفت فیلم	hf
زمان	t	دمای بالک	T_B
مختصات در جهت x	x	دمای سطح مدل	T_S
مختصات در جهت y	y	حجم المان	VOL
ضریب انبساط حرارتی	α	تغییرات دماهای اعمال شده	∂T
بردار عملگر	$\{L\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$	بردار بیان کننده جابجایی جرم بر اثر انتقال حرارت	$\{V\}=\begin{Bmatrix} VX \\ VY \\ VZ \end{Bmatrix}$



الگوریتم روش Explicit

شکل ۹ـ الگوریتم روش **explicit**



الگوریتم روش Implicit
و کرانک نیکلسون

شکل ۱۰ ـ الگوریتم روش **Implicit** و کرانک نیکلسون

منابع

1- Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, Taylor & Francis Group, New York, (1984).
2- Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, New York (1980).
3- Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, Inc., New York (1962).
4- Vesteeg, Henk karle, 'An introduction to computational fluid dynamics: the finite volumemethod,chenc,u.s,1955.
5- Abbott , M. B .and Basco , B. R. Computational Fluids Dynamics-An Introduction for Engineers, Longman Scientific & Technical, Harlow, UK. (1989).
6- Crank, J. and Nicolson , P. A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-conduction Type, Proc Cambridge Phi. Soc., Vol.43, pp.50-67, 1947.
7- Fletcher, C. A. J. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume I and II, Springer - Verlag, Berlin (1991).
8- ANSYS Theory Manual Heat Flow Version 8, ANSYS, Inc., Southpointe, 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317, USA (2003).
9- FLUENT User's Manual Version 6.01, Fluent Europe Ltd, Sheffield, UK, (2002).