کاربرد معادله هدایت حرارت هذلولوی با توجه به نوع شرایط مرزی

امیر امیدوار، مهدی معرفت

دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده فنی و مهندسی، بخش مهندسی مکانیک

چکیده

حل معادلات هدایت حرارت هذلولوی اغلب با مشکلات زیادی همراه است. لذا شناخت موارد کاربرد اینگونه معادلات و ضرورت استفاده از آنها بسیار حائز اهمیت است. در واقع با توجه به نوع شرایط مرزی حاکم بر مساله، در برخی موارد می‌توان با تقریب خوبی از معادله هدایت سهموی به جای معادله هدایت هذلولوی استفاده نمود. در این مقاله به بررسی همگرائی جوابهای معادله هدایت حرارت هذلولوی و سهموی با توجه به شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. در حالتی که سطح جسم ناگهان در معرض جابجایی حرارتی قرار می‌گیرد در لحظات اولیه، جوابهای این دو معادله کاملاً متمایز خواهند بود. اما بعد از گذشت مدت زمان طولانی جوابها همگرا خواهند شد. در مواردی که جسم تحت شرط مرزی نوسانی قرار دارد، حتی بعد از گذشت مدت زمان طولانی نیز جوابهای معادله هدایت حرارت هذلولوی و هدایت کلاسیک همگرا نخواهند شد. وقتی سطح جسم با محیط اطراف از طریق تابش تبادل حرارت می‌نماید، اگر اثرات تابش روی سطح خیلی قویتر از هدایت باشد و یا ضریب جذب سطح جسم خیلی بزرگ باشد، دمای سطح جسم با تقریب خوبی از معادله کلاسیک حرارت بدست می‌آید.

واژه‌های کلیدی: هدایت، هذلولوی، حرارت، تابش، نوسانی

مقدمه

هدایت حرارت نوعی انتقال انرژی است که به واسطه گرادیان دما در یک ماده صورت می‌گیرد و مکانیزم فیزیکی آن را فعالیت تصادفی اتمی یا مولکولی تشکیل می‌دهد. تئوری کلاسیک هدایت حرارتی که اغلب از آن به عنوان قانون هدایت فوریه نام می برند، شار حرارتی را مستقیماً با گرادیان دما به صورت خطی مرتبط می‌سازد. قانون فوریه یک قانون پدیده شناسی است، یعنی از پدیده‌های تجربی و نه از مفاهیم اولیه استخراج می‌گردد. بر مبنای مدل فوریه، حرارت در محیط هادی با سرعت بینهایت منتشر می‌شود. علیرغم اینکه مدل هدایت فوریه یک فیزیک غیر واقعی را در بر دارد؛ یعنی پخش ناگهانی انرژی حرارتی، اما تقریب بسیار خوبی است برای اکثر کاربردهای مهندسی در زندگی روزمره[۱].

این قانون در مواردی شبیه: انتقال حرارت گذرا در بازه‌های زمانی خیلی کوچک، انتقال گرما در دماهای خیلی پایین نزدیک صفر مطلق مانند کاربردهای کرایجنیک، در فرآیند پروسس مواد به‌کمک لیزر، تابش موجهای الکترومغناطیسی با شدت بالا، انتقال حرارت با نرخ زیاد در محیط‌های رقیق و انتقال حرارت در ساختارهایی در ابعاد میکرون نتایج غیر قابل قبولی را ارایه می‌نماید. علت این امر ناسازگاری مدل هدایت فوریه با فیزیک واقعی انتشارحرارت می‌باشد [۱]. کاتانئو[1] و ورنوته[2] در سال ۱۹۵۸ مدلی را ارائه دادند که بر محدود بودن سرعت انتشار حرارت استوار است. ساختار غیر همگن ماده باعث ایجاد یک تأخیر در پاسخ بین شار گرما و گرادیان دما می‌گردد. این تأخیر می‌تواند نمایانگر زمان لازم برای انبارش انرژی برای تبادل حرارت بین اجزا ساختاری ماده باشد. در طی این تأخیر، شار گرمایی به تدریج خود را با آنچه فوریه بیان می‌کند تطبیق می‌دهد [۲]. بنابراین جبهه موج در جایی قرار دارد که پاسخ به تحریک گرمایی[3] شروع به آرام گرفتن می‌کند. در حالی که فوریه بر این باور است که شار حرارتی به طور خیلی ناگهانی و سریع خود را با تغییرات گرادیان دما منطبق می‌سازد [۲].

معادله ریاضی حاکم بر هدایت هذلولوی گرما

در مدل فوریه فرض بی‌نهایت بودن سرعت انتشار حرارت در ماده بیانگر این است که بین شار حرارتی و گرادیان دما هیچگونه تأخیر زمانی وجود ندارد. به عبارت دیگر به محض ایجاد گرادیان دما، شار حرارتی نیز خود را با آن هماهنگ می‌کند. مدل هدایت هذلولوی گرما که سرعت انتشار حرارت را محدود فرض می‌کند، این حقیقت را در بر دارد که بین گرادیان دما و شار حرارتی تأخیر وجود دارد. به عبارت دیگر مدت زمانی طول می‌کشد تا حرارت از یک طرف جسم به طرف دیگر آن انتقال یابد. رابطه بین شار حرارتی و گرادیان دما را می‌توان اینگونه نوشت [۲]:

$$q(x,t+\tau) = -k\nabla T(x,t) \qquad (۱)$$

---

1 - Cattaneo
2 - Vernotet
3 -Thermal disturbance

که τ تحت عنوان زمان آرامش حرارتی نامیده می‌شود. τ جزء خواص ترمودینامیکی مواد دسته‌بندی می‌شود. اگر سمت چپ معادله (۱) را بسط داده و از جملات مرتبه بالاتر از یک نسبت به τ صرف‌نظر نماییم، داریم:

$$q(x,t)+\tau\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}=-k\nabla T(x,t) \tag{۲}$$

از ترکیب معادله (۲) با معادله انرژی یعنی

$$\rho c_p\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=-\nabla q(x,t) \tag{۳}$$

به معادله هدایت هذلولوی می‌رسیم [۲]:

$$\tau\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\alpha\nabla^2 T(x,t) \tag{٤}$$

علت اینکه به این معادله هدایت هذلولوی گفته می‌شود اینست که در دو طرف این معادله مشتقات مرتبه دوم دما ظاهر شده است. این معادله بیان‌کننده انتشار حرارت با سرعت محدود $v=(\frac{\alpha}{\tau})^{0.5}$ است، که α ضریب پخش حرارت است. تنها تفاوت معادله (٤) با معادله کلاسیک هدایت حرارتی، جمله $\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ است. اگر مقادیر τ درمـاده‌ای خیلی کوچک باشد به طوریکه بتوان از این ترم صرف‌نظرکرد، فرمول هدایت غیرفوریه‌ای بـه همـان فرم کلاسیک تبدیل می‌شود. اما مقادیر τ در مواد مختلف بسیار متفاوت است. برای مواد همگن، مانند مایعات خالص، گازها و جامدهای دی الکتریک مقادیر τ در محدوده 10^{-12} تا 10^{-8} ثانیه می‌باشد. در مواد غیر همگنی مانند شن و $NaHCO3$ ، زمان آرامش حرارتی نزدیک به ۲۰ ثانیه است. زمان آرامش حرارتی در جامدات غیر همگن به میزان زیادی به جزئیات ساختاری آنها وابسته است. مثلا در شن این مقدار به متوسط قطر دانه‌های شن بستگی دارد [۱].

ماهیت و شکل جواب معادله هدایت هذلولوی

معادله هدایت حرارت هذلولوی از دیدگاه ریاضی در قالب معادلات دیفرانسیل جزئی هذلولوی دسته‌بندی می‌گردد. این نوع معادلات به فرم کلی زیر هستند [۳]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k\,\frac{\partial W}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + bW + \Phi(x,t) \qquad (٦)$$

اگر در این دسته از معادلات: $\Phi(x,t)=0$ $b<0$ ، $k>0$ به معادله مشهوری در الکترونیک می‌رسیم که به معادله تلگراف معروف است. در حالت کلی جواب‌های بنیادین این معادله به فرم زیر است.

$$E(x,t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|)\exp(-\frac{kt}{2}) I_0(c\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}) \quad : \quad b+\frac{1}{4}k^2>0 \qquad (٧)$$

$$E(x,t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|)\exp(-\frac{kt}{2}) J_0(c\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}) \quad : \quad b+\frac{1}{4}k^2<0 \qquad (٨)$$

که $H(z)$ تابع پله واحد[٤] است، $J_0(z)$ تابع بسل و $I_0(z)$ تابع بسل اصلاح شده می باشد[۳]. ظاهر شدن تابع پله در جوابهای بنیادین این معادله نشانی از ایجاد یک شوک یا یک جبهه تند موج در جواب است. بنابراین برای زمانهای کوتاه که هنوز تمام جسم حرارت را احساس نکرده است یک شوک تند در منحنی‌های نمایه دما دیده می‌شود.

روشهای حل معادله هدایت حرارت هذلولوی

برای حل معادله هدایت حرارت هذلولوی کارهای زیادی هم به صورت تجربی و هم به صورت تحلیلی در این سالها انجام شده است. در سال ۲۰۰۱ میلادی دوهامل[٥] یک تبدیل انتگرالی محدود جدید برای بررسی و حل معادله هدایت غیر فوریه‌ای در مواد نامتجانس ارائه داده است. با توجه به اینکه این نوع هدایت حرارت بیشتر در مواد غیر همگن مطرح است (τ در این مواد بزرگ است) و اینکه در بسیاری از موارد خواص نیز ثابت نیستند، لذا حل تحلیلی این معادله بسیار مشکل است. به این دلیل تا کنون بیشتر به روشهای حل عددی این معادله توجه شده است. اما حل عددی نیز خالی از اشکال نیست. بزرگترین مشکلی که در حل عددی این نوع مسایل وجود دارد ناپیوستگی‌های شدید در نمایه دما برای زمانهای کوتاه اولیه است. در این موارد، حل‌های عددی در نزدیکی ناپیوستگی‌ها به شدت دچار نوسان می‌گردند. در سال ۱۹۹۲ یک روش جدید برای حل عددی معادله هدایت حرارت هذلولوی ارایه شد [٤]. حسن این روش اینست که حل بدست آمده در نزدیکی ناپیوستگی‌ها دچار نوسان نمی‌شود. روش کلی حل به این صورت است که در ابتدا از معادله هدایت حرارت غیر فوریه‌ای تبدیل لاپلاس نسبت به زمان گرفته می‌شود. این کار وابستگی زمانی معادله را از بین می‌برد. سپس معادله دیفرانسیل معمولی به دست آمده را از طریق عددی حل می‌نمایند، در پایان باید از جوابهای بدست آمده لاپلاس معکوس گرفت تا نمایه

4 - Heaviside unit step function
5 - Duhamel

اصلی دما به دست آید. برای حل معادله دیفرانسیل بدست آمده از تبدیل لاپلاس، از طرفین معادله در فاصله $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ انتگرال‌گیری می‌شود. در واقع انتگرال‌گیری در طول حجم کنترل صورت می‌گیرد. این روش یک دیدگاه حجم محدود[6] دارد. اما تمام نکته کار در اینجاست که باید نمایه دما را در داخل هر حجم کنترل به فرم Sinh در نظر گرفت. علت این امر این است که معادله دیفرانسیل معمولی بدست آمده از تبدیل لاپلاس در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} - \lambda^2\theta = 0 \quad ; \quad (\eta_i \le \eta \le \eta_{i+1}) \tag{۹}$$

که جواب این معادله به فرم Sinh است. با انتگرالگیری از طرفین معادله دیفرانسیل معمولی به دست آمده از تبدیل لاپلاس و استفاده از این شکل نمایه دما در هر حجم کنترل، مساله تبدیل به حل یک دستگاه معادله سه قطری می‌شود که با روش T.D.M.A حل می‌گردد. در پایان باید از جوابها لاپلاس معکوس گرفت. البته این بخش کار هم چندان آسان نیست و نیازمند لاپلاس معکوس عددی است. از آنجا که در این روش ابتدا از تبدیل لاپلاس استفاده می‌گردد و سپس معادله به روش عددی حل می‌شود به این روش، هیبرید یا روش ترکیبی می‌گویند. این راهکار تاکنون بهترین روش برای حل عددی معادله هدایت حرارت هذلولوی بوده است. چرا که علاوه بر حذف نوسانات عددی محدودیتی در شرط مرزی مبنی بر خطی یا غیر خطی بودن آن ندارد [٤].

هدایت هذلولوی با شرط مرزی جابجایی

آنتاکی[7] در سال ۱۹۹٦ هدایت حرارت هذلولوی را در یک صفحه نیمه بی‌نهایت تحت شرایط مرزی جابجایی مورد بررسی قرار داده است[٥]. معادله حاکم و شرایط مرزی به قرار زیر است:

$$\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{۱۰}$$

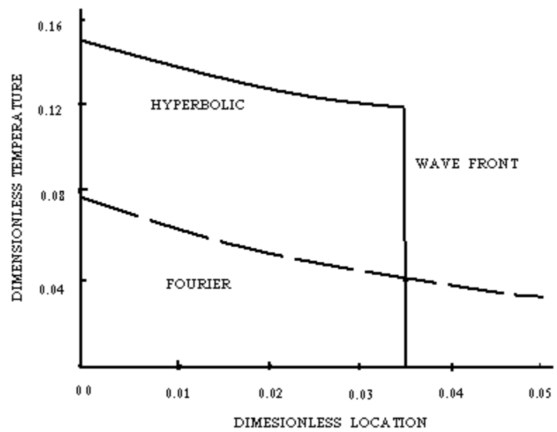
$$T(x,0) = T_0 \tag{۱۱}$$

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial x} = 0 \tag{۱۲}$$

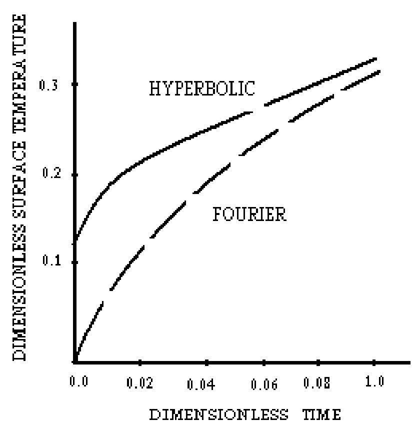
$$T(\infty,t) = T_0 \tag{۱۳}$$

$$q(0,t) = h[T_\infty - T(0,t)] \tag{۱٤}$$

6 - Finite Volume
7 - Antaki



شکل ۱ـ هدایت هذلولوی و سهموی با شرط مرزی جابه‌جایی حرارتی



شکل ۲ـ همگرایی جوابهای معادلات هدایت حرارت هذلولوی و سهموی با شرط مرزی جابه‌جایی حرارتی

آنتاکی با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و معکوس آن این مسأله را به صورت تحلیلی حل نموده است. نتایج در شکلهای (۱) و (۲) آمده است (این نمودارها برای فرآورده‌های گوشتی رسم شده‌اند).

نمودارها حاکی از اینست که اگر یک صفحه ناگهان در معرض جابه‌جایی حرارتی قرار گیرد در لحظات اولیه نمایه دما با آنچه فوریه پیش‌بینی می‌کند کاملاً متفاوت است. اما با گذشت زمان نتایج این دو مدل بر هم منطبق می‌گردند. در لحظات اولیه در مرز صفحه یک پرش دما[۸] دیده می‌شود. در این حالت دماهای پیش‌بینی شده از طریق هدایت هذلولوی بیشتر از چیزی است که فوریه پیش‌بینی می‌کند (درحالت سرمایش عکس این مطلب صحیح است). از نتایج این مسأله چنین بر می‌آید که در بررسی اثرات حرارت بر بافت بدن انسان باید اثرات هدایت حرارت غیر فوریه‌ای را در نظر گرفت. مخصوصاً در مورد اثرات لیزر و نفوذ آن در بافت بدن و میزان تخریب بافتهای مجاور این مساله حائز اهمیت است[۵] .

هدایت هذلولوی با شرط مرزی تابش

اوزیسیک[۹] و ویک[۱۰] در سال ۱۹۸۵ به بررسی هدایت حرارت هذلولوی با شرط مرزی تابش پرداخته‌اند [٦]. این دو نفر هدایت هذلولوی را برای یک صفحه نیمه بی نهایت $0 < x < \infty$ که در ابتدا در دمای T_0 قرار دارد مورد بررسی قرار دادند. در این مسأله شار حرارتی $f(t)$ روی سطح $x = 0$ اعمال می‌گردد و سطح $x = 0$ می‌تواند با محیطی با دمای T_∞ از طریق تابش تبادل حرارت نماید. آنها نتایج بدست آمده از حل عددی معادله هدایت هذلولوی به همراه اثرات تشعشع روی سطح را با نتایج حل عددی معادله سهموی مقایسه نموده‌اند. نتایج کار این دو نفر در شکل (۳) آمده است. که $\xi = \frac{v^2 t}{2\alpha}$ ، v سرعت انتشار موج گرمایی در محیط است، t زمان و α ضریب پخش گرماست. منظور از α_s ضریب جذب سطح و σ ضریب استفان بولتزمان است. N از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$N = \frac{k\beta}{n^2 \sigma T^3{}_r} \qquad (۱۵)$$

$$T_r = \frac{\alpha f_r}{kv} \qquad (۱٦)$$

$$\beta = \frac{v}{\alpha} \qquad (۱۷)$$

f_r شار مرجع روی سطح جسم و n ضریب انعکاس است. به بیانی دیگر می‌توان گفت که N نسبت هدایت به تابش است،

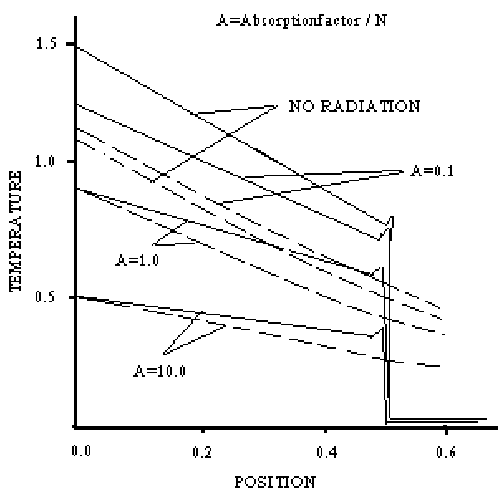
$$N = \frac{q_{conduction}}{q_{radiation}} \qquad (۱۸)$$

---

8 - Temperature Jump
9 - Ozisik
10 - Vick

در شکل شماره (۳) دیده می‌شود که هرچه اثرات تابش نسبت به هدایت قویتر باشد، دمایی را که معادله هذلولوی برای سطح قطعه پیش‌بینی می‌کند با سرعت بیشتری به سمت دمای پیش‌بینی شده توسط فوریه همگرا می‌گردد [٦]. افزایش ضریب جذب سطح جسم نیز همین اثر را اعمال می‌کند. همانطور که دیده می‌شود، در صورت نادیده گرفتن اثرات تابش روی سطح جسم، شیب پروفیلهای دمای بدست آمده از هدایت هذلولوی و سهموی خیلی به هم نزدیک است، ولی با افزایش اثرات تشعشع روی سطح و نیز افزایش ضریب جذب سطح شیب منحنی‌ها کاملاً از یکدیگر متفاوت خواهد بود.

بنابراین در مواردی که اثرات تابش روی سطح خیلی قوی‌تر از هدایت است و نیز در مواردیکه ضریب جذب سطح جسم خیلی زیاد است، دمای سطح جسم بعد از گذشت زمانهای کوتاه، با تقریب خوبی از همان معادله کلاسیک هدایت حرارتی بدست می‌آید.



شکل ۳ـ اثرات شرط مرزی تابش بر هدایت هذلولوی

هدایت حرارت هذلولوی با شرط مرزی نوسانی

در سال ۱۹۹۸ یوئن[۱۱] و لی[۱۲] در مقاله‌ای به بررسی اثرات هدایت غیر فوریه‌ای بر بازدهی سطوح گسترده تحت شرایط دمای پریودیک پایه پرداخته‌اند[۱]. آنها با استفاده از مدل هذلولوی هدایت گرما در یک فین، توزیع دما و بازدهی آن را به صورت عددی بررسی نموده‌اند. در این مقاله هدایت هذلولوی با استفاده از روش ترکیبی در یک فین با نوک آدیاباتیک به طول L و ضخامت b $(b/L \ll 1)$ مورد بررسی قرار گرفته است. این فین به صفحه‌ای متصل است که دمای آن به صورت تابع زیر تغییر می‌کند:

$$T_b(t)=\bar{T}_b+(\bar{T}_b-T_{in})A\cos(\hat{\omega}t) \quad ; \quad t>0 \qquad (۱۹)$$

که $\bar{T}_b$ دمای متوسط پایه، T_{in} دمای اولیه، A دامنه و $\hat{\omega}$ فرکانس تغییرات دمای پایه است. فرض شده که فین تنها از طریق جابه‌جایی حرارت را به محیط با دمای ثابت T_e انتقال می‌دهد (از اثرات تابش صرف‌نظر شده است). از بررسی اثرات هدایت حرارت غیر فوریه‌ای بر بازدهی حرارتی یک سطح گسترده همراه با جابه‌جایی در شرایط کاری پریودیک این نتیجه بدست آمده است که اگر چه اثرات هدایت هذلولوی در لحظات اولیه کار آن چشمگیرتر است، اما زمانیکه فرکانس تغییرات دمای پایه زیاد است حتی بعد از گذشت مدت زمان طولانی نیز این اثرات باقی خواهند ماند[۱].

نتیجه‌گیری

در مواردی که شرایط مرزی در جسم به طور ناگهانی تغییر می‌کند هدایت حرارتی غیرفوریه‌ای حائز اهمیت است؛ زمانی اثرات هدایت غیرفوریه‌ای چشمگیر است که مقادیر τ بزرگ باشد و این به جنس ماده بستگی دارد. در مواردی که سطح جسم ناگهان در معرض جابه‌جایی حرارتی قرار می‌گیرد، در لحظات اولیه جوابهای هدایت هذلولوی و سهموی کاملاً از یکدیگر متمایزند اما بعد از گذشت زمانهای طولانی این دو جواب به سمت هم همگرا می‌شوند. در حالتی که شرط مرزی مساله نوسانی است این دو جواب بر هم منطبق نخواهند شد. مخصوصاً اگر پریود نوسانات تحریک با زمان آرامش حرارتی هم مرتبه باشند، حتی بعد از گذشت زمانهای طولانی نیز اثرات هدایت غیرفوریه‌ای باقی خواهد ماند.

در بررسی اثرات هدایت هذلولوی با درنظرگرفتن تابش در سطح این نتیجه بدست می‌آید که اگر اثرات تابش روی سطح خیلی قویتر از هدایت باشد و نیز اگر ضریب جذب سطح جسم خیلی زیاد باشد، دمای سطح جسم حتی بعد از گذشت زمانهای کوتاه با تقریب خوبی از همان معادله کلاسیک هدایت حرارت بدست می‌آید. به عبارت دیگر، جوابهای این دو مدل خیلی سریع به سمت هم همگرا می‌شوند. از سوی دیگر در صورت نادیده گرفتن اثرات تابش روی سطح جسم، شیب نمایه‌های دمای بدست آمده از هدایت هذلولوی و سهموی خیلی به هم نزدیک است. با افزایش اثرات تشعشع روی سطح و نیز افزایش ضریب جذب تابشی سطح، شیب منحنی‌ها کاملاً از یکدیگر متفاوت خواهند شد.

---

11 - Yuen

12 - Lee

علائم و نشانه‌ها:

Cp: ظرفیت گرمایی ویژه $(kj/kg.K)$

h: ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (W/m^2K)

K: ضریب هدایت حرارتی (W/mK)

N: نسبت انتقال حرارت هدایت به جابه‌جایی

N: ضریب انعکاس

Q: شار حرارتی (W/m^2)

T: دمای مطلق (K)

t: زمان (s)

v: سرعت انتشار موج گرمایی (m/s)

σ: ثابت استیفان بولتزمن

α: ضریب پخش حرارتی (m^2/s)

θ: دمای بی بعد

ρ: چگالی (kg/m^3)

τ : زمان آرامش حرارتی (s)

منابع:

1- Jae-Yuh Lin, The nonfourier effect on the fin performance under periodic thermal conditions, Applied mathematical modeling, 22, 629-640, 1998.

2- Joao N.N. Quaresma, Emanuel N. Macedo, Ntonio G. Barbosa Da Cruz Hybrid solution in hyperbolic heat conduction, Proceeding of the 2'ed International Conference on Computational Heat and Mass Transfer federal university of Rio de Janerio Brazil, 22-26, October 2002.

3- Andrei D.Polyanin, Handbook of linear partial differential equations for engineering and scientists, Chapman & Hall, 2001.

4- Han-Taw Chen, Jae Yuh Lin, Numerical analysis for hyperbolic heat conduction, Int.J.Heat and Mass Transfer, 36, 2891-2898, 1993.

5- Paul. J. Antaki, Analysis of hyperbolic heat conduction in a semi infinite slab with surface convection, Int. J. Heat and Mass transfer, 40, 3247-3250, 1997.

6- D.E.Glass, M.N Ozisik, Hyperbolic heat conduction with surface radiation, Int .J. Heat and Mass Transfer, 28, 1823-1830, 1985.